CHAPITRE 103

Séance 1 — 40 min. Document du professeur, jamais distribué. Les élèves suivent sur le cours complet, sans recopier, et surlignent les numéros cités. Aucune démonstration n'est au programme pour ce chapitre.

Page de garde — Partie 1, la citation *2 min*

Anecdote Maryam Mirzakhani (1977–2017) est la première femme à avoir reçu la médaille Fields, en 2014. Adolescente, à Téhéran, elle rêvait de devenir écrivain et ne s'intéressait guère aux mathématiques. *(entretien de M. Mirzakhani,* Quanta Magazine*, août 2014)*

I.A — Vocabulaire, notations, Définition 1 *6 min*

Au tableau La suite des carrés, rang au-dessus, terme en dessous :

rang n	0	1	2	3	…
terme u_n	0	1	4	9	…

puis $u_n = n^2$.

Faire dire à voix haute que $u_3 = 9$ est le *quatrième* terme, puisqu'on numérote à partir de 0 ; u_3 et $u(3)$ désignent le même nombre. Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (définition 1).

Anecdote Les pythagoriciens obtenaient les carrés $1, 4, 9, 16\ldots$ en ajoutant autour d'un carré de cailloux une équerre, le *gnomon*, de 3, puis 5, puis 7 cailloux : une suite construite de proche en proche, vingt-cinq siècles avant la notation u_{n+1}. *(Aristote,* Physique*, III, 4)*

I.B — Voir une petite suite *4 min*

Au tableau La règle de la suite projetée : si le terme est pair, on le divise par 2 ; sinon, on le multiplie par 3 et on ajoute 1.
$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4$: ce sont les ordonnées des douze points. Les points ne sont pas reliés : il n'y a rien entre deux rangs consécutifs.

Anecdote C'est la suite de Syracuse. Quel que soit le premier terme essayé, on finit par retomber sur le cycle $4, 2, 1$; personne n'a su le démontrer depuis que Lothar Collatz a posé la question, dans les années 1930. *(J. C. Lagarias,* The 3x+1 problem and its generalizations*, 1985)*

I.C — Deux modes de génération, Exemples 1 et 2 *9 min*

Au tableau **Ex. 1** (formule explicite) : $u_2 = 3 \times 2 - 1 = 5$, calcul direct.
Ex. 2 (récurrence), en escalier : $v_1 = 3v_0 - 1 = 3 \times 0 - 1 = -1$, puis $v_2 = 3v_1 - 1 = 3 \times (-1) - 1 = -4$.
Provoquer l'erreur $v_2 = 3 \times 2 - 1$ et faire dire pourquoi elle est fausse : dans une récurrence, c'est le terme précédent qui entre dans le calcul, pas le rang.

Anecdote Dans son *Liber abaci* (1202), Fibonacci compte des couples de lapins : chaque mois, le nombre de couples est la somme des nombres des deux mois précédents : $1, 2, 3, 5, 8, 13\ldots$ L'un des premiers exemples européens de suite définie par récurrence. *(Léonard de Pise,* Liber abaci*, 1202)*

II — Le sens de variation, Définition 2 *6 min*

Au tableau Deux termes consécutifs 10 puis 5 : la suite n'est pas croissante. Deux termes consécutifs 2 puis 7 : elle n'est pas décroissante.
Les trois types, en colonne : croissante ; décroissante ; **non monotone**. « Pas croissante » ne veut pas dire « décroissante ». La diapositive donne les versions strictes ; la définition 2 du cours donne aussi les versions larges.

Anecdote *Monotone* vient du grec *monos*, « seul », et *tonos*, « ton » : d'un seul ton. Une suite monotone ne change jamais de sens. *(*Trésor de la langue française informatisé*, article « monotone »)*

Démontrer qu'une suite n'est pas monotone — Exemple 3 *5 min*

Au tableau $u_n = n^2 - 4n + 3$: $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = -1$, $u_3 = 0$.
$u_1 < u_0$, donc u n'est pas croissante ; $u_3 > u_2$, donc u n'est pas décroissante. Conclusion : u n'est pas monotone.
Le cours le souligne ensuite : avec seulement 10, 7, 3, on peut seulement dire « pas croissante ».

Démontrer qu'une suite est monotone — Exemples 4 et 5 *8 min*

Au tableau **Ex. 4** : $u_{n+1} - u_n = \big(-3+5(n+1)\big) - (-3+5n) = (5n+2)+3-5n = 5 > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$: u est strictement croissante.
Ex. 5 : $u_n > 0$ pour tout n, donc on peut écrire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}8 < 1$, d'où $u_{n+1} < u_n$: u est strictement décroissante.
Exiger la phrase « $u_n > 0$ pour tout n » avant tout quotient. Ne pas dire « raison » : le mot appartient au chapitre sur les suites arithmétiques et géométriques.

Anecdote Le modèle de l'exemple 5 rappelle la loi du refroidissement publiée par Isaac Newton en 1701, sans nom d'auteur : sur des durées égales, l'écart de température entre un corps et l'air ambiant est multiplié par un même nombre inférieur à 1. L'atelier F en fait un four de potier, en négligeant la température de l'air. *(I. Newton, « Scala graduum caloris », Philosophical Transactions, 1701)*